Grafy i Zastosowania

©Marcin Sydow

Wstęp: Tw. Halla

Transwersale

Dualność

Zbiory niezależne

Skojarzenia c.d.

Macierze binarne

Podsumowanie

Grafy i Zastosowania

11: Twierdzenia Minimaksowe

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- Wstęp: Kojarzenie Małżeństw i Transwersale
- Dualność i twierdzenia minimaksowe
- Zbiory niezależne i pokrycia (Tw. Gallai)
- Skojarzenia w grafach (tw. Berge'a)
- Skojarzenia w grafach dwudzielnych (tw. Königa, Halla)
- Pokrycia macierzy (tw. Königa-Egervary'ego)
- Rozłączne ścieżki a rozcięcia (tw. Mengera)

Problem kojarzenia małżeństw

Rozważmy graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie

- V_1 reprezentuje zbiór panien,
- V_2 zbiór kawalerów,
- krawędź $(u, v) \in E$ reprezentuje fakt, że panna u zna kawalera v.

Problem: czy można tak skojarzyć pary, żeby każda panna mogła poślubić kawalera, którego zna?

Skojarzenie (zbiór niezależny krawędzi)

Skojarzeniem w grafie $G = (V, E)$ nazywamy podzbiór M krawędzi grafu taki, że żadne dwie różne krawędzie z M nie są incydentne z tym samym wierzchołkiem (jest to równoważne pojęciu zbioru niezależnego krawędzi).

przykład

Skojarzenie doskonałe to skojarzenie M takie, że każdy wierzchołek z V jest incydentny z jakąś krawędzią z M.

przykład zastosowania: Ze zbioru wielonarodowych ochotników wybrać jak najwięcej 2-osobowych zespołów takich, że każdy zespół potrafi się komunikować w danym języku

Skojarzenia w grafach dwudzielnych

Skojarzenie całkowite ze zbioru V_1 w zbiór V_2 w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ to takie skojarzenie, że każdy wierzchołek z V_1 jest incydentny z pewną krawędzią z M.

Problem kojarzenia małżeństw można modelować jako problem istnienia skojarzenia całkowitego w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Uwaga: Zagadnienie znajdowania skojarzeń ma liczne zastosowania praktyczne w problemach *przydziału zasobów* (np. zadania do maszyn, zajęcia do wykładowców, zadania do agentów o określonych kwalifikacjach, etc.)

Skojarzenia w grafach dwudzielnych (Tw. Halla)

Twierdzenie (Hall, 1935):
Warunek konieczny i wystarczający rozwiązania problemu kojarzenia małżeństw to by dla każdego zbioru k dziewcząt ze zbioru V_1 wszystkie one znały conajmniej k chłopców ze zbioru V_2.

(dowód przez indukcję po liczbie dziewcząt)

Twierdzenie (inne sformułowanie tw. Halla): W grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ istnieje skojarzenie całkowite ze zbioru V_1 w zbiór V_2 $\Leftrightarrow$ dla każdego podzbioru $A \subseteq V_1$ zachodzi $N(A) \geq |A|$ (gdzie $N(A)$ oznacza zbiór wierzchołków sąsiednich do wierzchołków z A, niebędących w A).

Twierdzenie:
Niepusty graf dwudzielny regularny ma skojarzenie doskonałe.
(dowód wynika z tw. Halla)

Transwersala

Rozważmy rodzinę $F = (S_1, ..., S_m)$ niepustych podzbiorów pewnego zbioru X.

transwersalą rodziny F nazywamy zbiór różnych m elementów zbioru X wybranych po jednym z każdego podzbioru S_i.

Transwersalę nazywamy też *systemem reprezentantów* rodziny F.

Twierdzenie:
Rodzina $F = (S_1, ..., S_m)$ ma transwersalę $\Leftrightarrow$ suma dowolnych k podzbiorów F ma conajmniej k elementów.

Uwaga: można zauważyć, że jest to jeszcze inne sformułowanie tw. Halla.

przykład

Transwersala częściowa

Transwersalą częściową rodziny F nazywamy transwersalę dowolnej podrodziny rodziny F.

Twierdzenie:
Rodzina $F = (S_1, ..., S_m)$ ma t-elementową transwersalę częściową $\Leftrightarrow$ suma dowolnych k podzbiorów F ma conajmniej $k - (m - t)$ elementów.

Uwaga: widoczna jest naturalna analogia między zagadnieniami istnienia transwersali i istnienia skojarzenia w grafie dwudzielnym.

Zjawisko dualności i twierdzenia "minimaksowe"

Istnieją zagadnienia optymalizacyjne posiadające specyficzną cechę "dualności", tzn. zadanie maksymalizacji pewnej funkcji jest równoważne zagadnieniu minimalizacji innej funkcji.
Do zagadnień takich należą np.:

- maksymalny niezależny zbiór wierzchołków/krawędzi vs minimalne pokrycie wierzchołkowe/krawędziowe (tw. Gallai)
- skojarzenie maksymalne vs pokrycie wierzchołkowe (w grafie dwudzielnym) (tw. Königa)
- maksymalna liczba jedynek niezależnych w macierzy binarnej vs minimalne pokrycie tej macierzy (tw. Königa-Egervary'ego)
- maksymalna liczba ścieżek wierzchołkowo/krawędziowo rozłącznych vs minimalny zbiór rozdzielający/rozspajający (tw. Mengera)
- maksymalny przepływ w sieci vs minimalny przekrój (tw. Forda-Fulkersona)

Słaba i silna dualność, certyfikaty optymalności

W zagadnieniach tego typu istnieje na ogół proste ograniczenie od góry maksymalizowanej wielkości przez minimalizowaną (tzw. "słaba dualność").

Ponadto, gdy znajdzie się parę rozwiązań, dla których zachodzi równość, oznacza to optymalność obu wielkości równocześnie (tzw. istnienie "certyfikatu optymalności")

Typowe dla tych zagadnień są tzw. "twierdzenia minimaksowe", które orzekają o równości rozwiązania maksymalizującego jedną wielkość i minimalizującego drugą (tzw. "silna dualność")

Dualność a programowanie liniowe

Powyższe zagadnienie dualnośći związane jest z zagadnieniem dualnośći w tzw. *programowaniu liniowym*[1].

Można w ten bardzo ogólny sposób formułować rozmaite zagadnienia optymalizacyjne w jednolitej formie układu równań/nierówności i w naturalny sposób otrzymywać pary dualnych zagadnień. Jest to bardzo użyteczna technika rozwiązywania zagadnień optymalizacji dyskretnej.

[1] Zagadnienie to nie jest objęte zakresem niniejszego kursu

Zbiór niezależny (i skojarzenie)

W grafie nieskierowanym $G = (V, E)$ **zbiorem niezależnym** wierzchołków nazywamy taki podzbiór X wierzchołków, że żadne dwa różne wierzchołki z X nie są sąsiednie.

przykład

Podobnie, zbiór krawędzi nazywamy **niezależnym** jeśli żadne dwie różne krawędzie nie są incydentne z tym samym wierzchołkiem. Inną używaną nazwą tego pojęcia jest **skojarzenie** w grafie.

Uwaga: łatwo jest znaleźć jakikolwiek zbiór niezależny w grafie (np. jedno-elementowy).

Istnotne jest natomiast zagadnienie znajdowania **zbioru niezależnego o maksymalnej liczności**

przykład

Zastosowania

Za pomocą zbiorów niezależnych wierzchołków można modelować problemy polegające na znajdowaniu optymalnych lokalizacji pewnych obiektów przy unikaniu podanych konfliktów, np:

- ustawianie nieszachujących się wzajemnie figur na szachownicy
- umieszczanie możliwie dużej liczby nadajników radiowych na pewnym obszarze, tak, żeby nie kolidowały ze sobą
- lokowanie dużych sklepów lub usług o podobnym profilu sprzedaży lub usług
- umieszczanie np. niebezpiecznych substancji chemicznych w sąsiadujących kontenerach, czy pomieszczeniach, etc.

Schemat rozwiązania: tworzymy tzw. *graf konfliktów* (wierzchołki to możliwe lokalizacje, każda krawędź reprezentuje konflikt). Poszukiwanie rozwiązanie to zbiór niezależny o maksymalnej liczności w takim grafie.

Pokrycie wierzchołkowe/krawędziowe

Pokryciem wierzchołkowym w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór X wierzchołków, że każda krawędź z E jest incydentna z conajmniej jednym wierzchołkiem z X.

przykład

Pokryciem krawędziowym w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór Y krawędzi, że każdy wierzchołek z V jest incydentny z conajmniej jedną krawędzią z Y.

przykład

Uwaga: oczywiście V jest pokryciem wierzchołkowym a E jest pokryciem krawędziowym grafu $G = (V, E)$.

Istotnym problemem jest znalezienie pokrycia **o minimalnej liczności**.

Niezależność i pokrycia

Rozważmy następujące wielkości w pewnym grafie $G = (V, E)$

- $\nu(G)$: maksymalna liczba krawędzi niezależnych
- $\alpha(G)$: maksymalna liczba wierzchołków niezależnych
- $\tau(G)$: minimalna liczność pokrycia wierzchołkowego
- $\rho(G)$: minimalna liczność pokrycia krawędziowego (zakładamy tu, że graf nie ma wierzchołków izolowanych)

Słaba dualność niezależności i pokryć

Fakt:
$\nu(G) \leq \tau(G)$ (maksymalna liczba krawędzi niezależnych jest niewiększa od minimalnej liczby wierzchołków w pokryciu)

(dowód: już na same krawędzie ze zbioru niezależnego potrzeba przynajmniej po jednym wierzchołku pokrywającym)

Fakt:
$\alpha(G) \leq \rho(G)$ (maksymalna liczba wierzchołków niezależnych jest niewiększa od minimalnej liczności pokrycia krawędziowego)

(dowód: już na same wierzchołki ze zbioru niezależnego potrzeba przynajmniej po jednej krawędzi pokrywającej)

Silna dualność niezależności i pokryć (Tw. Gallai)

Twierdzenie:
Zbiór wierzchołków jest pokryciem o maksymalnej liczności $\Leftrightarrow$ jego dopełnienie jest zbiorem niezależnym o minimalnej liczności.

Wynika z tego, że:

$$\alpha(G) + \tau(G) = |V|$$

(przypomnienie:)

- $\alpha(G)$: maksymalna liczba wierzchołków niezależnych
- $\tau(G)$: minimalna liczność pokrycia wierzchołkowego

dowód: zbiór wierzchołków (krawędzi) jest pokryciem $\Leftrightarrow$ jego dopełnienie jest zbiorem niezależnym

Silna dualność niezależności i pokryć (Tw. Gallai), c.d.

Co bardzo ciekawe, zachodzi także druga, "dualna" równość:

$\nu(G) + \rho(G) = |V|$

(zauważmy, że lewa strona dotyczy krawędzi a prawa wierzchołków!)

(przypomnienie:)

- $\nu(G)$: maksymalna liczba krawędzi niezależnych
- $\rho(G)$: minimalna liczność pokrycia krawędziowego (zakładamy tu, że graf nie ma wierzchołków izolowanych)

Skojarzenia w grafach dwudzielnych, Tw Königa

Twierdzenie:
W grafie dwudzielnym zachodzi: $\nu(G) = \tau(G)$, czyli maksymalna liczba krawędzi niezależnych (maksymalna liczność skojarzenia) jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w pokryciu.
(jest to kolejny przykład silnej dualności)

przypomnienie:

- $\nu(G)$: maksymalna liczba krawędzi niezależnych
- $\tau(G)$: minimalna liczność pokrycia wierzchołkowego

Skojarzenia w dowolnych grafach

Droga przemienna względem skojarzenia M to taka droga prosta, której krawędzie na przemian należą i nie należą do skojarzenia M.
(przyjmujemy, że pojedyncza krawędź jest zawsze drogą przemienną)

przykład

Droga powiększająca względem skojarzenia M to dowolna droga przemienna, która nie jest cyklem, taka, że jej końce nie są końcami krawędzi z M

przykład

Twierdzenie (Berge, 1957):
skojarzenie jest skojarzeniem o maksymalnej liczności $\Leftrightarrow$ nie istnieje ścieżka powiększająca względem tego skojarzenia

Skojarzenia doskonałe (tw. Tutte'go)

Twierdzenie (Tutte, 1945):
Graf $G = (V, E)$ ma skojarzenie doskonałe $\Leftrightarrow$ dla każdego podzbioru wierzchołków $S \subseteq V$ zachodzi: $q(G - S) \leq |S|$

gdzie: $q(G - S)$ oznacza liczbę tych składowych spójnych podgrafu grafu G, indukowanego przez S, które mają nieparzystą liczbę wierzchołków.

Tw Königa-Egervary'ego

Rozważmy macierz binarną (zawierającą tylko wartości 0 lub 1). Linią nazwiemy dowolną kolumnę lub wiersz tej macierzy.

Twierdzenie (König-Egervary 1931):
Maksymalna liczba jedynek nieleżących w tej samej linii równa jest minimalnej liczbie linii zawierających wszystkie jedynki.

Uwaga: można zauważyć, że twierdzenie to jest równoważne twierdzeniu o skojarzeniu maksymalnym w grafie dwudzielnym: macierz to macierz incydencji rozważanego grafu dwudzielnego!

Macierze binarne a transwersale

Dla rodziny $F = (S_1, ..., S_m)$ podzbiorów n-elementowego zbioru $X = (x_1, ..., x_n)$ rozważmy odpowiadającą jej **macierz incydencji** $A(F)$ taką, że $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ gdy zbiór $S_i \ni x_j$ a pozostałe wyrazy są zerami.

Zauważmy, że twierdzenie o istnieniu transwersali wynika z powyższego twierdzenia.

Rozłączne drogi a spójność (silna dualność)

Twierdzenie Mengera (wersja krawędziowa i wierzchołkowa): W dowolnym grafie spójnym G, dla dowolnych niesąsiednich wierzchołków u, v *maksymalna* liczba dróg rozłącznych krawędziowo (wierzchołkowo) łączących u i v równa jest *minimalnej* liczności zbioru rozspajającego (rozdzielającego) który oddziela wierzchołki u i v

przykład

Podsumowanie

- Wstęp: Kojarzenie Małżeństw i Transwersale
- Dualność i twierdzenia minimaksowe
- Zbiory niezależne i pokrycia (Tw. Gallai)
- Skojarzenia w grafach (tw. Berge'a)
- Skojarzenia w grafach dwudzielnych (tw. Königa, Halla)
- Pokrycia macierzy (tw. Königa-Egervary'ego)
- Rozłączne ścieżki a rozcięcia (tw. Mengera)

Przykładowe ćwiczenia

- znajdź maksymalne skojarzenie w podanym grafie dwudzielnym
- znajdź maksymalną transwersalę częściową w podanej rodzinie zbiorów
- oszacuj minimalne pokrycie lub maksymalny zbiór niezależny w podanym grafie (dla krawędzi lub wierzchołków)
- oszacuj maksymalną liczbę rozłącznych ścieżek pomiędzy danymi dwoma wierzchołkami w podanym grafie

Dziękuję za uwagę