Grafy i Zastosowania

8: Kolorowanie Grafów

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- Kolorowanie wierzchołków
- Kolorowanie map
- Kolorowanie krawędzi
- Wielomian chromatyczny

Zastosowania

Problem kolorowania grafów ma wiele odmian (np. kolorowanie wierzchołków, krawędzi, ścian). Może być on postrzegany m.in. jako model abstrakcyjny reprezentujący rozmaite zadania o praktycznym znaczeniu, np:

- rozmieszczanie przestrzenne obiektów
- przydział zasobów
- przydział częstotliwości radiowych
- projektowanie map

Zakładamy tu, że wszystkie rozważane grafy są spójne i proste (w przypadku kolorowania wierzchołków).

Kolorowanie wierzchołków

Przez **kolorowanie** wierzchołków grafu G nazywamy takie przyporządkowanie każdemu z jego wierzchołków pewnego *koloru*, reprezentowanego umownie przez liczbę naturalną, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają przyporządkowanego tego samego koloru.

Graf nazywamy **k-kolorowalnym** $\Leftrightarrow$ wystarczy k kolorów, żeby go pokolorować

fakt: jeśli graf jest k-kolorowalny to jest (k+1)-kolorowalny

Liczbą chromatyczną $\chi(G)$ grafu G nazywamy najmniejszą taką liczbę k, że graf G jest k-kolorowalny.

Graf G nazywamy **k-chromatycznym** $\Leftrightarrow \chi(G) = k$

przykłady

Proste własności

- $\chi(Z) = 0$ (graf zerowy)
- $\chi(N_n) = 1$
- $\chi(K_n) = n$ (i $\chi(G) \leq |V(G)|$)
- jeśli graf G zawiera K_n jako podgraf to $\chi(G) \geq n$
- graf jest dwudzielny (i niepusty) $\Leftrightarrow$ jest 2-chromatyczny
- każde drzewo jest 2-chromatyczne
- każdy cykl C_n parzysty jest 2-chromatyczny a nieparzysty 3-chromatyczny
- graf Petersena jest 3-chromatyczny
- każde koło W_n jest albo 3-chromatyczne albo 4-chromatyczne (zależy od parzystości n)

Nie jest znana prosta charakteryzacja grafów 3-chromatycznych

Liczba kolorów a stopnie wierzchołków

Twierdzenie:
Jesli G jest prostym grafem, w którym największy stopień wierzchołka wynosi Δ, to G jest $(\Delta + 1)$-kolorowalny.

Dowód: prosty przez indukcję po liczbie wierzchołków

przykład

Twierdzenie to może być nieco wzmocnione (tw. Brooksa)

Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie (Brooks, 1941):
Spójny, prosty graf G, który nie jest pełny i taki, że największy stopień wierzchołka wynosi $\Delta \geq 3$ jest Δ-kolorowalny

Twierdzenie to jest przydatne, gdy wszystkie stopnie są podobnej wielkości, natomiast może dowolnie wysoko przeszacowywać liczbę chromatyczną grafu, gdy którykolwiek wierzchołek ma stopień dużo wyższy od reszty,

przykład: $K_{1,s}$ (jest 2-chromatyczny dla dowolnego $s > 0$)

6-kolorowanie grafów planarnych

Twierdzenie:
Każdy graf *planarny* prosty jest 6-kolorowalny

(dowód: przez indukcję po liczbie wierzchołków. W grafie planarnym musi istnieć wierzchołek stopnia co najwyżej 5, przez jego usunięcie i skorzystanie z założenia indukcyjnego, można pokolorować ten wierzchołek kolorem innym niż jego (conajwyżej 5) sąsiadów)

Twierdzenie to również można wzmocnić.

5-kolorowanie grafów planarnych

Twierdzenie:
Każdy graf planarny prosty jest 5-kolorowalny

Dowód: również przez indukcję po liczbie wierzchołków. Początek taki jak w poprzednim twierdzeniu. Jeśli istnieje wierzchołek v taki, że $deg(v) < 5$, (lub $deg(v) = 5$, ale sąsiedzi nie używają wszystkich 5 kolorów) to na chwilę wyjmujemy go i z założenia indukcyjnego pokolorujemy go kolorem niewykorzystanym wśród sąsiadów v .
W przeciwnym przypadku, jeśli $deg(v) = 5$ (z planarności, musi taki istnieć), i wszyscy jego sąsiedzi mają 5 różnych kolorów, to zauważamy, że nie wszystkie pary sąsiadów v mogą być sąsiednie (bo wtedy tworzyłoby to K_5, co jest niemożliwe przy planarności). Niech więc u, w będą sąsiadami v, którzy nie są sąsiadami. Wtedy ściągamy krawędzie (u, v) oraz (w, v) otrzymując graf o mniejszej liczbie wierzchołków, a więc kolorujemy go 5 kolorami z założenia indukcyjnego.
Na koniec otrzymujemy 5-kolorowanie wyjściowego grafu następująco. Odwracamy operacje ściągnięcia i nadajemy wierzchołkom u, w kolory wierzchołka v, a wierzchołkowi v nadajemy wtedy kolor niewykorzystany wśród jego 5 sąsiadów (gdyż teraz u i w mają ten sam kolor.

przykład

4-kolorowanie grafów planarnych

Twierdzenie (Appel, Haken; 1976)
Każdy graf planarny prosty jest 4-kolorowalny.

Twierdzenie zostało sformułowane w 1856. Dowód ostatecznie zakończono w roku 1976 i jego stworzenie zabrało autorom *kilka lat*.
Uwaga: dowód powyższego twierdzenia jest słynny, gdyż jako jeden z pierwszych polegał na bardzo intensywnym użyciu komputera do *automatycznego* wygenerowania części dowodu dla pewnych licznych specjalnych przypadków.
Zauważono, że jest to nowy rodzaj dowodu (kwestionowany przez niektórych), gdyż jest niemożliwy do bezpośredniego "przeczytania" przez człowieka.

Automatyczne dowodzenie jest obecnie intensywnie rozwijającą się dziedziną sztucznej inteligencji. Polega m.in. na ciągłych intensywnych obliczeniach mających na celu automatyczne odkrywanie nowych twierdzeń matematycznych nieznanych wcześniej przez człowieka.

Czy to twierdzenie można jeszcze bardziej wzmocnić? (3-kolorowalność planarnych?)

Przykładowe zastosowanie

- dany jest zbiór 90-minutowych wykładów do przeprowadzenia
- niektóre wyszczególnione pary wykładów nie mogą się nachodzić czasowo, gdyż dotyczą tego samego kursu
- problem: ile najwyżej różnych jednostek czasowych (90-minutowych) trzeba przeznaczyć na realizację kursu?

Przykładowe rozwiązanie polega na stworzeniu grafu na podstawie powyższych danych i odpowiedzeniu ile wynosi liczba chromatyczna takiego grafu.

Kolorowanie ma wiele zastowań w podobnych zadaniach praktycznych polegających na *przydziale zasobów*.

Problem kolorowania map

W przypadku mapy (np. geograficznej czy politycznej) narysowanej na płaszczyźnie istotny jest pewien problem praktyczny:

ilu kolorów należy użyć dla poszczególnych obszarów, aby żadne sąsiadujące ze sobą obszary nie miały tego samego koloru?

Poprzez pojęcie dualności problem ten sprowadzić można do problemu kolorowania wierzchołków.

Mapa

Zakładamy, że **mapa** opisana jest przez graf G planarny 3-spójny (bez mostów). Wtedy ściany G odpowiadają obszarom mapy, krawędzie G granicom między obszarami, a wierzchołki G odpowiadają punktom, w których spotykają się granice.

przykład

Mapa jest **k-kolorowalna(f)** $\Leftrightarrow$ jej ściany (włączając ścianę nieograniczoną) można tak pokolorować, że po obu stronach każdej krawędzi są rózne kolory.

Mapa jest **k-kolorowalna(v)** $\Leftrightarrow$ odpowiadający jej graf jest k-kolorowalny (wierzchołkowo).

Dualność

Twierdzenie:
Jeśli G jest planarnym grafem bez pętli a G^* jest jego grafem geometrycznie dualnym, to:

G jest k-kolorowalny(v) $\Leftrightarrow$ G^* jest k-kolorowalny(f)

Wniosek:
Każda mapa jest 4-kolorowalna.

Szczególne mapy

Twierdzenie:
Mapa jest 2-kolorowalna(f) $\Leftrightarrow$ odpowiadający jej graf jest eulerowski.

Twierdzenie:
Mapa kubiczna (której graf jest kubiczny, czyli 3-regularny) jest 3-kolorowalna(f) $\Leftrightarrow$ każda jej ściana jest ograniczona parzystą liczbą krawędzi.

Kolorowanie krawędzi

Graf jest **k-kolorowalny(e) (k-kolorowalny krawędziowo)** jeśli jego krawędzie można pokolorować tak, że żadne dwie krawędzie incydentne z tym samym wierzchołkiem nie mają tego samego koloru.

Indeks chromatyczny $\chi'(G)$ grafu G to najmniejsza taka liczba k, że graf G jest k-kolorowalny(e).

przykład

Twierdzenie Vizinga

Twierdzenie (Vizing, 1964):
W grafie prostym G, w którym najwyższy stopień wierzchołka wynosi Δ zachodzi: $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

Nie jest znana prosta charakteryzacja rozróżniająca te dwa przypadki.

przykład:
$\chi'(C_n) = 2$ dla n parzystych a 3 dla nieparzystych

Inne wyniki

Twierdzenie:
$\chi'(K_n) = n - 1$ dla n parzystych a $\chi'(K_n) = n$ dla nieparzystych

Twierdzenie (K onig, 1916):
Dla grafu G dwudzielnego o największym stopniu wierzchołka Δ zachodzi: $\chi'(G) = \Delta$

Liczba sposobów pokolorowania wierzchołków grafu

Funkcją chromatyczną $P_G(k)$ grafu G nazywamy funkcję, której wartość to *liczba sposobów* pokolorowania wierzchołków grafu G (tak aby żadne sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru).

przykłady:

- $P_{N_n}(k) = k^n$
- $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ gdy G jest drzewem o n wierzchołkach
- $P_{K_k}(k) = 1$
- $P_{K_n} = k(k-1)\dots(k-n+1)$

Obliczanie funkcji chromatycznej grafu

Twierdzenie:
Jeśli graf G jest prosty i $G - e$ oraz $G \setminus e$ oznaczają odpowiednio graf powstały przez usunięcie oraz ściągnięcie krawędzi e tego grafu, to zachodzi następujący wzór rekurencyjny:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\setminus e}(k)$$

Uwaga 1: ponieważ grafy po prawej stronie nierówności są mniejsze od G a wartość funkcji chromatycznej dla grafów pustych jest łatwa do obliczenia (potęga k), to powyższa równość jest dobrze określona.

(dowód: przez rozpatrzenie 2 przypadków pokolorowania grafu $G - e$)

przykład

Wniosek:
Funkcja chromatyczna dowolnego grafu jest wielomianem.

Nazywamy ją też **wielomianem chromatycznym**

Podsumowanie

- Kolorowanie wierzchołków
- Kolorowanie map
- Kolorowanie krawędzi
- Wielomian chromatyczny

Przykładowe ćwiczenia/zadania

- wyznacz lub oszacuj liczbę chromatyczną danego grafu
- wyznacz lub oszacuj indeks chromatyczny danego grafu
- zaproponuj odpowiednią reprezentację danego problemu przydziału zasobów, częstotliwości radiowych lub rozmieszczenia przestrzennego obiektów
- oblicz wielomian chromatyczny podanego grafu

Dziękuję za uwagę