

Grafy i Zastosowania

1: Wprowadzenie i pojęcia podstawowe

© Marcin Sydow

Spis Zagadnień

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

- zastosowania grafów
- definicja grafu (i skierowanego), prostego, multigrafu
- sąsiedztwo i incydencja
- izomorfizm grafów
- stopnie wierzchołków (w tym wejściowy i wyjściowy), lemat o uściskach dłoni, sekwencja stopni
- definicja podgrafu i grafu indukowanego
- operacje na grafach (suma grafów \cup), odjęcie wierzchołka $-$, odjęcie krawędzi $-$, ściągnięcie krawędzi \setminus , dołączanie wierzchołka $+$, dopełnienie grafu (G') , iloczyn kartezjański grafów \times)
- rodziny grafów: zerowy, pusty (N_i) , pełny (K_i) , regularny, platoński, petersena, ścieżkowy (P_i) , cykliczny (C_i) , kołowy (W_i) , drabinkowy (LD_i) , hiperkostka (Q_i) , dwudzielny (w tym pełny dwudzielny: $K_{i,j}$)
- reprezentacje grafów (macierze sąsiedztwa i incydencji, listy sąsiedztwa, listy krawędzi)

Zastosowania grafów

Grafi w rozlicznych zastosowaniach mogą modelować np:

- sieci społeczne
- sieci komputerowe
- sieć www
- sieci telekomunikacyjne
- sieci połączeń drogowych, kolejowych, etc.
- automaty skończone
- procesy przemysłowe, procedury, algorytmy
- hierarchie, drzewa genealogiczne
- sieci elektryczne
- cząsteczki chemiczne
- molekuły biologiczne
- ekosystemy
- przepływy finansowe
- wymianę handlową między państwami
- migracje ludności, etc.

Dziedziny zastosowań grafów

- informatyka
- matematyka
- logistyka, transport
- geopolityka
- obliczenia równoległe
- bio-informatyka
- badania operacyjne
- socjologia
- telekomunikacja
- analiza przepływów finansowych
- zwalczanie przestępczości zorganizowanej, etc.

Uwagi ogólne (ważne dla slajdów całego tego kursu)

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Uwaga: wszystkie wyrazy lub frazy czcionką **wyróżnioną** reprezentują *pojęcia teorii grafów* pojawiające się pierwszy raz w ich *definicjach* (definicje należy znać i pamiętać).

* Uwaga 2: większość materiału jest zgodna z książką R.Wilsona “Wprowadzenie do teorii grafów”. Fragmenty, których nie ma w Wilsonie, lub są inne (np. różne nazewnictwo) mogą być oznaczone symbolem “*”.

Uwaga 3 (dla niematematyków): symbol \Leftrightarrow (czyt. “wtedy i tylko wtedy”) oznacza warunek konieczny i wystarczający

Graf (matematyczna definicja grafu)

Graf (nieskierowany) to uporządkowana para zbiorów:
 $G = (V, E)$, gdzie:

- V to zbiór *wierzchołków* grafu
- E to zbiór *krawędzi* grafu G .
- każda krawędź $e = \{v, w\}$ ze zbioru E to *nieuporządkowana* para wierzchołków ze zbioru V , zwanych *końcami* krawędzi e .

Dla krawędzi $e = \{v, w\} \in E$ mówimy też:

- krawędź e *łączy* wierzchołki v i w
- wierzchołki v i w są *sąsiednie* w grafie
- krawędź e jest *incydentna* z wierzchołkiem v i w .

Graf nieskierowany naturalnie reprezentuje *symetryczną* relację binarną na zbiorze wierzchołków (przykład).

* Graf, w którym zbiory V i E są puste nazywamy **zerowym**

Rysunek grafu

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Graf można narysować na płaszczyźnie¹ na nieskończenie wiele (równoznacznych) sposobów. Rysunek jest tylko sposobem graficznej reprezentacji grafu.

przykład: rysunek grafu Petersena

Należy odróżniać graf jako obiekt abstrakcyjny od jego rysunków.

przykłady (różne rysunki tego samego grafu)

¹lub innej powierzchni (np. torusie, etc.)

Graf skierowany (digraf) (matematyczna definicja)

Graf skierowany to uporządkowana para zbiorów: $G = (V, E)$, gdzie:

- V to zbiór *wierzchołków* grafu
- E to zbiór (skierowanych) *krawędzi* grafu G .
- każda (skierowana) krawędź $e = (v, w)$ ze zbioru E to *uporządkowana* para wierzchołków ze zbioru V , zwanych *początkiem* i *końcem* krawędzi e

Dla krawędzi $e = (v, w) \in E$ mówimy też, że krawędź e *biegnie* od v do w . (lub, że krawędź *wychodzi* z v i *wchodzi* do w)

Krawędzie skierowane nazywamy też *łukami*.

Graf skierowany reprezentuje dowolną relację binarną na zbiorze wierzchołków.

przykład

Graf prosty i jego uogólnienia

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

graf prosty: nie ma *pętli* ani *krawędzi wielokrotnych* (pętla to krawędź postaci (v, v) , uwaga: dla grafu skierowanego krawędzie (v, w) i (w, v) są różne, a więc mogą występować obie na raz (nie jest to krawędź wielokrotna))

przykłady

(ten kurs dotyczy głównie grafów prostych)

* Możliwe uogólnienia grafu prostego:

multigraf: może posiadać krawędzie wielokrotne (pomiędzy tą samą parą wierzchołków)

hipergraf: hiper-krawędzie mogą stanowić krotki wierzchołków (trójki, czwórki, etc. a nie tylko pary), czyli mogą reprezentować relacje o wyższej arności niż 2

przykłady

Stopień wierzchołka

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

stopień wierzchołka, $\deg(v)$, liczba krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem.

(uwaga: W grafach nieprostych przyjmujemy, że każda pętla (v, v) wnosi 2 do stopnia wierzchołka)

wierzchołek o stopniu 0 nazywamy **izolowanym**

minimalny i maksymalny stopień wierzchołka w grafie G oznaczamy przez $\delta_{\min}(G)$ i $\Delta(G)$

graf, w którym wszystkie stopnie są równe i nazywamy **regularnym** stopnia i (lub **i -regularnym**). Graf 3-regularny nazywamy **kubicznym**.

Wybrane własności stopni

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

twierdzenie:

lemat o uściskach dłoni: suma stopni wierzchołków jest parzysta

wniosek:

liczba wierzchołków nieparzystego stopnia musi być parzysta

ciąg stopni wierzchołków (posortowany nierosnąco)

przykład: charakteryzacja ciągu wierzchołków

Stopnie w grafach skierowanych

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

stopień wejściowy wierzchołka v ($\text{indeg}(v)$): liczba krawędzi skierowanych, których v jest końcem (liczba krawędzi wchodzących do v)

stopień wyjściowy wierzchołka v ($\text{outdeg}(v)$): liczba krawędzi skierowanych, których v jest początkiem (liczba krawędzi wychodzących z v)

tw:

suma stopni wejściowych w grafie równa jest sumie stopni wyjściowych
(odpowiednik lematu o uściskach dłoni)

Izomorfizm grafów

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Grafy $G_1(V_1, E_1)$ i $G_2(V_2, E_2)$ są **izomorficzne** \Leftrightarrow istnieje bijekcja² f pomiędzy zbiorami wierzchołków V_1 i V_2 , $f : V_1 \rightarrow V_2$ zachowująca krawędzie, tzn. v, w są połączone krawędzią w grafie $G_1 \Leftrightarrow f(v), f(w)$ są połączone krawędzią w grafie G_2 .

przykłady

Interpretacja: grafy izomorficzne są “takie same” z punktu widzenia teorii grafów

Zastosowania: chemia (rozdzielanie cząsteczek), patenty, utożsamianie rysunków

przykład

²funkcja wzajemnie jednoznaczna, tj. różnowartościowa i “na” (surjekcja)

Trudność problemu izomorfizmu grafów *

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Algorytm: nie jest znany efektywny³ algorytm sprawdzający czy dane dwa grafy są izomorficzne. (Co ciekawe, problem izomorfizmu oczywiście należy do klasy NP, ale *nie wiadomo*, czy jest NP-zupełny)

³o złożoności co najwyżej wielomianowej

Podgraf i graf indukowany

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$ (czyli reprezentowany przez podzbiory wierzchołków i krawędzi)

przykład

Podgraf grafu G **indukowany** przez podzbiór $V' \subseteq V$ wierzchołków grafu G to podgraf zawierający wierzchołki V' i wszystkie krawędzie z grafu G o końcach w V'

przykład

Operacje na grafach (wybrane)

- suma grafów ($G_1 \cup G_2$): suma zbiorów wierzchołków i krawędzi
- odjęcie krawędzi ($G - e$): ($V, E \setminus \{e\}$)
- odjęcie wierzchołka ($G - v$): odjęcie wierzchołka i wszystkich krawędzi z nim incydujących
- ściągnięcie krawędzi ($G \setminus e$): usunięcie krawędzi i utożsamienie jej końców
- dodanie wierzchołka $G + v$: dodanie wierzchołka i krawędzi łączących go z wszystkimi pozostałymi wierzchołkami
- dopełnienie grafu G' : G' ma tylko te krawędzie, które były nieobecne w G
- * iloczyn kartezyjski grafów ($G_1 \times G_2$): jeśli $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ to $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, (V_1 \times E_2) \cup (V_2 \times E_1))$

Niektóre ważne typy grafów

- pusty N_n (same wierzchołki, pusty zbiór krawędzi)
- pełny K_n (wszystkie możliwe krawędzie pomiędzy n wierzchołkami - dopełnienie pustego)
- dwudzielny (zbiór wierzchołków da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory, takie że ewentualne krawędzie występują tylko pomiędzy tymi zbiorami a nie wewnątrz nich) i pełny dwudzielny $K_{m,n}$ (dwudzielny mający wszystkie możliwe krawędzie)
- ścieżkowy P_n , cykliczny C_n , kołowy W_i (cykliczny C_i z dodatkowym wierzchołkiem połączonym ze wszystkimi z C_i : $W_i = C_i + K_1$)
- * hiperkostka Q_i (rzędu i : wierzchołki są ciągami binarnymi długości i , są sąsiednie tylko gdy różnią się jednym bitem)
- * drabinkowy LD_i ($LD_i = P_i \times P_2$) (wygląda jak drabinka o i szczebelkach)

Reprezentacje grafów *

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Oprócz definicji matematycznej, stosuje się rozmaite *reprezentacje grafów*, szczególnie użyteczne w programach komputerowych.

- macierz sąsiedztwa
- macierz incydencji
- listy sąsiedztwa
- lista krawędzi
- reprezentacja obiektowa (różne rodzaje)

Uwaga: w przypadku dodatkowych etykiet lub wag krawędzi lub wierzchołków, powyższe reprezentacje są odpowiednio rozszerzane

Macierz sąsiedztwa *

Dla grafu $G = (V, E)$, o n wierzchołkach **macierz sąsiedztwa** grafu G : kwadratowa macierz A o n wierszach i kolumnach, taka, że $A[i, j] = 1 \Leftrightarrow$ wierzchołki i, j są połączone krawędzią, $A[i, j] = 0$ w przeciwnym przypadku.

(w przypadku pętli (i, i) , wstawiamy wartość 2 w pozycji $A[i, i]$)

Obserwacje:

- dla grafów nieskierowanych macierz jest symetryczna ($A^T = A$)
- dla grafów prostych przekątna zawiera zera
- suma w wierszu: stopień (wyjściowy, dla skierowanych)
- suma w kolumnie: stopień (wejściowy, dla skierowanych)
- dla grafów skierowanych A^T odpowiada “odwróceniu” kierunków krawędzi

przykład

Macierz incydencji *

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Macierz I , gdzie wiersze odpowiadają wierzchołkom a kolumny krawędziom. $I[v, e]$ zawiera $1 \Leftrightarrow v$ jest incydentny z e . W przeciwnym razie zawiera 0 .

Dla grafów skierowanych: 1 dla wchodzących, -1 dla wychodzących

przykład

Macierze sąsiedztwa i macierze incydencji mają wiele interesujących własności algebraicznych odnoszących się do reprezentowanych grafów (m.in. tym zajmuje się tzw. *algebraiczna teoria grafów*)

Listy sąsiedztwa *

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Reprezentacja ta składa się z list odpowiadających poszczególnym wierzchołkom. Każda lista rozpoczyna się od etykiety wierzchołka, po której następuje lista wierzchołków sąsiednich (dla grafów skierowanych: lista wierzchołków, do których wchodzi krawędzie wychodzące z bieżącego wierzchołka).

przykład

Koszt pamięciowy reprezentacji *

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

Reprezentacje różnią się istotnie m.in. ilością zużytej pamięci komputera oraz złożonością czasową niektórych wykonywanych na nich operacji.

Przez **rozmiar grafu** rozumie się parę (n, m) , gdzie n to liczba wierzchołków a m to liczba krawędzi grafu.

Graf nazywamy **rzadkim** jeśli jego liczba krawędzi jest “mała” czyli jest liniową funkcją n (bardziej formalnie: $m = O(n)$, dla ustalonego ciągu grafów)

Proste własności reprezentacji *

- macierz sąsiedztwa ma zawsze rozmiar $\Theta(n^2)$, niezależnie od liczby krawędzi grafu (ma zawsze kwadratowy koszt pamięciowy)
- lista sąsiedztwa ma rozmiar $\Theta(n + m)$, czyli dostosowuje się do liczby krawędzi (dla grafów rzadkich ma tylko koszt liniowy)
- macierz incydencji ma zawsze rozmiar $\Theta(n \cdot m)$
- pewne operacje są szybsze na macierzy niż na listach sąsiedztwa (które)

Inne reprezentacje *

- lista krawędzi (bardzo prosta, czytelna dla ludzi, nadaje się do formatu tekstowego (każda krawędź w oddzielnej linii, nadaje się do grafów dynamicznie zwiększających się)
- obiektowa (wysokopoziomowa): każdy wierzchołek i każda krawędź to obiekt; wierzchołki mogą mieć dowiązania do swoich sąsiadów i krawędzi incydentnych, analogicznie krawędzie
- “gd0” (niskopoziomowy format binarny): połączona lista ciągów identyfikatorów całkowitoliczbowych, gdzie każdy ciąg jest postaci: $id_i, deg_i, n_{i,1} \dots n_{i,deg_i}$ (identyfikator wierzchołka, jego stopień (wyjściowy), ciąg identyfikatorów jego sąsiadów)

Podsumowanie

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

- zastosowania grafów
- definicje grafu i grafu skierowanego
- izomorfizm
- stopnie wierzchołków
- operacje na grafach
- ważne typy grafów
- reprezentacje grafów

Przykładowe Zadania

Grafy i Zastosowania

© Marcin Sydow

Wprowadzenie

Podstawowe pojęcia

Operacje na grafach

Typy grafów

Reprezentacje

Podsumowanie

- definicje grafu, grafu skierowanego, prostego, multigrafu i hipergrafu wraz z przykładowymi rysunkami
- stopnie wierzchołków w grafach (i skierowanych), własności
- definicja izomorfizmu. Dla podanych grafów: wskaż izomorfizm lub udowodnij, że nie są izomorficzne
- dla każdej z omawianych operacji: dokonaj jej na podanym grafie lub grafach
- dla każdego z omawianych typów grafów podaj ile ma wierzchołków i krawędzi, wykonaj rysunek (dla małych przykładów)
- oblicz reprezentacje podanego grafu skierowanego i nieskierowanego (macierz sąsiedztwa i incydencji, lista sąsiedztwa, lista krawędzi)
- omów własności, wady i zalety (złożoność pamięciowa, złożoność czasowa wybranych zadań obliczeniowych) każdej z omawianych reprezentacji grafów

Dziękuję za uwagę