

Aleksander Denisiuk

Zastosowanie metod geometrii do wybranych  
zagadnień informatyki

Autoreferat

4 grudnia 2018

## Spis treści

<b>1. Imię i nazwisko</b> . . . . .	2
<b>2. ORCID ID</b> . . . . .	2
<b>3. Posiadane dyplomy, stopnie</b> . . . . .	2
<b>4. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu</b> . . . . .	2
<b>5. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki</b> . . . . .	2
5.1. Tomografia komputerowa . . . . .	2
5.1.1. Wykaz publikacji monotematycznych . . . . .	2
5.1.2. Omówienie osiągnięcia naukowego . . . . .	3
5.2. Analiza danych . . . . .	6
5.2.1. Wykaz publikacji monotematycznych z wykazaniem procentowego udziału współautorów . . . . .	6
5.2.2. Omówienie osiągnięcia naukowego . . . . .	7
<b>6. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze</b> . . . . .	10
6.1. Index cytowań . . . . .	10
6.2. Inżynieria oprogramowania . . . . .	11
6.3. Kierowanie międzynarodowymi lub krajowymi projektami badawczymi lub udział w takich projektach . . . . .	11
6.4. Recenzowanie . . . . .	11
6.5. Praca redaktorska . . . . .	12
6.6. Wygłaszanie referatów na międzynarodowych i krajowych konferencjach . . . . .	12
6.7. Nagrody za działalność naukową . . . . .	12
6.8. Staże w zagranicznych i krajowych ośrodkach naukowych lub akademickich . . . . .	13
<b>7. Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne i inne osiągnięcia</b> . . . . .	13
7.1. Praca dydaktyczna . . . . .	13
7.2. Nagrody za działalność dydaktyczną . . . . .	14
7.3. Zawody w programowaniu zespołowym . . . . .	14
7.4. Członkostwo w międzynarodowych i krajowych organizacjach oraz towarzystwach naukowych . . . . .	14
7.5. Udział w organizacji międzynarodowych konferencji . . . . .	14
7.6. Popularyzacja nauki . . . . .	15
7.7. Projekty informatyczne . . . . .	15
<b>Bibliografia</b> . . . . .	15

## 1. Imię i nazwisko

Aleksander Denisiuk.

## 2. ORCID ID

0000-0002-7501-7048

## 3. Posiadane dyplomy, stopnie

**Magistra:** Wydział Mechaniki i Matematyki, Uniwersytet Moskiewski, 1987.

**Doktora:** Wydział Mechaniki i Matematyki, Uniwersytet Moskiewski, 1991.

## 4. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu

**2015–obecnie:** Adiunkt, Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych, Wydział Informatyki w Gdańsku.

**2010–obecnie:** Adiunkt, Warmińsko-Mazurski Uniwersytet w Olsztynie, Wydział Matematyki i Informatyki.

**2005–2015:** Adiunkt, Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna.

**2001–2005:** Wykładowca, Prywatna Wyższa Szkoła Zawodowa w Giżycku, Katedra Informatyki Stosowanej.

**1995–2001:** Docent, Uniwersytet Brzeski (Białoruś), Katedra Informatyki i Matematyki Stosowanej.

**1991–1995:** Wykładowca, Krasnojarski Uniwersytet Pedagogiczny (Rosja), Katedra Informatyki i Metod Numerycznych.

## 5. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki

Osiągnięcia naukowe można podzielić na dwa główne wątki: tomografia komputerowa oraz analiza danych.

### 5.1. Tomografia komputerowa

#### 5.1.1. Wykaz publikacji monotematycznych

Lista publikacji zawiera pięć artykułów z obecnej ministerialnej listy A: [A], [B], [E], [G], [H]. Jeden artykuł jest uwzględniony na liście B: [D]. Dwa artykuły pochodzą z materiałów konferencyjnych, indeksowanych w WoS: [C], [I]. A także dwa artykuły zostały opublikowane w innych recenzowanych czasopismach: [F] oraz [J].

Wszystkie prace zostały opublikowane samodzielnie.

- [A]. Aleksander Denisiuk. “Reconstruction in the cone-beam vector tomography with two sources”. *Inverse Problems*, **34**, 124008 doi: 10.1088/1361-6420/aae9ac (2018) Punktacja ministerialna: 40. 2017/2018 Impact factor: 1,946. Ilość cytowań: 0.
- [B]. Aleksander Denisiuk. “Inversion of the X-ray transform for complexes of lines in  $\mathbb{R}^n$ ”. *Inverse Problems*, **32**, 025007 doi: 10.1088/0266-5611/32/2/025007 (2016) Punktacja ministerialna: 40. 2016 Impact factor: 1,62. Ilość cytowań: 1 (WoS), 3 (Google Scholar).
- [C]. Aleksander Denisiuk. “Interpolation procedure in Filtered Backprojection Algorithm for the Limited-Angle Tomography”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 551-558, Vol. 226, 551-558, Springer, doi: 10.1007/978-3-319-00969-8\_54 (2013). Indeksowano w WoS. Ilość cytowań: 1 (WoS), 3 (Google Scholar).
- [D]. Aleksander Denisiuk. On Numerical Reconstruction of a Function from incomplete data of Arc means in Seismic Tomography, *Machine Graphics & Vision*, Vol. **20**, Issue 4, 413—437 (2011). Lista B. Punktacja ministerialna: 7. Ilość cytowań: 1 (Google Scholar).
- [E]. Alexander Denisjuk. “Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve”. *Inverse Problems*, **22**, 399 doi: 10.1088/0266-5611/22/2/001 (2006) Na liście A od 2009, obecna punktacja ministerialna: 40. 2006 Impact factor: 1,319. Ilość cytowań: 17 (WoS), 33 (Google Scholar).
- [F]. Alexander Denisjuk. “On reconstruction of a stable part of band-limited function by interpolation” *Proceedings of the Institute of Mathematics on NAS of Belarus*, vol. 5, 60–62 (2000). Ilość cytowań: 1 (Google Scholar).
- [G]. Alexander Denisjuk. “Integral geometry on the family of semi-spheres”, *Fractional calculus and applied analysis*, vol. **2**, No 1, 31–46 (1999). Na liście A od 2014, obecna punktacja ministerialna: 40. 2013 Impact factor: 2,974. Ilość cytowań: 45 (Google Scholar).
- [H]. Alexander Denisyuk. “Explicit Inversion Formulas for the Ray Transform in Spaces of Constant Curvature”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. **38** 915–925 (1997) Na liście A od 2009. Obecna punktacja ministerialna: 15. Impact factor: 0,148. Ilość cytowań: 0 (WoS), 2 (Google Scholar).
- [I]. Alexander Denisjuk. “On exact explicit formulas for inversion of X-ray transform”, *Computerized Tomography: proceedings of the fourth international symposium held in Novosibirsk on 10–14 August, 1993*, (M. M. Lavrent’ev editor-in-chief) Utrecht, the Netherlands, 117–123 (1995). Indeksowano w WoS. Ilość cytowań: 0.
- [J]. Alexander Denisyuk. “Inversion of generalized Radon transform”, *AMS Translations*, Ser. 2, vol. **162**, 19—32 (1994). Ilość cytowań: 9 (Google Scholar).

### 5.1.2. Omówienie osiągnięcia naukowego

Szeroko pojęta tomografia komputerowa stanowi dziedzinę przetwarzania obrazów, która obejmuje grupę bezinwazyjnych technik diagnozowania, polegających na uzyskaniu przekrojów obiektów na podstawie projekcji.

Klasycznym przykładem zagadnienia jest medyczna tomografia komputerowa, która wykorzystuje do uzyskania projekcji promieniowanie rentgenow-

skie [18]. Matematycznie zagadnienie sprowadza się do rekonstrukcji funkcji  $f(x)$  na płaszczyźnie z przekształcenia Radona:

$$Rf(l) = \int_l f(x) dl, \quad (1)$$

gdzie  $l$  jest prostą na płaszczyźnie,  $dl$  jest odpowiednią miarą na prostej  $l$ .

Matematycznie zagadnienie odwrócenia transformacji (1) zostało rozwiązane w roku 1917 przez Johanna Radona [21]. Odpowiedni wzór jest podstawą algorytmów tomograficznych [18, 7].

Osiągnięcia habilitanta w dziedzinie tomografii komputerowej może zgrupować w czterech kierunkach: tomografia 3D, wykorzystanie innych, niż rentgenowskie źródeł promieniowania, tomografia w warunkach danych niezupełnych oraz rekonstrukcja innych niż, skalarne funkcje danych. Głównymi osiągnięciami są konkretne tomograficzne algorytmy przetwarzania obrazów, które zostały poprzedzone szczegółową analizą geometryczną.

**Tomografia 3D.** Dany kierunek obejmuje zagadnienia opracowania metod akwizycji i przetwarzania danych, pozwalających na rekonstrukcję obrazu trójwymiarowego zamiast serii płaskich przekrojów.

W szczególności, zbiór wszystkich dostępnych pomiarów w tym przypadku jest czterowymiarowy. Więc powstaje zagadnienie określenia trójwymiarowego zbioru danych, wystarczającego do rekonstrukcji oraz odpowiednich algorytmów [7].

Naturalnym przykładem takiego zbioru jest zbiór promieni, wychodzących z danej krzywej  $\gamma \in \mathbb{R}^3$ . Techniczna interpretacja danych jest następująca: źródło promieniowania przemieszcza się wzdłuż krzywej  $\gamma$ , a detektory rejestrują dane ze wszystkich promieni. Jednak w ostatnich latach zostały opracowane nowe techniki tomograficzne, które sprowadzają zagadnienia tomografii Comptonowskiej [20] oraz *lamanej* [6] do tomografii prostoliniowej. Przy czym odpowiedni zbiór danych prostoliniowych może się różnić od opisanego modelu.

Sformułujemy rozpatrywane zagadnienie bardziej ogólnie: określić  $n$ -wymiarowy zbiór danych, wystarczający do rekonstrukcji funkcji w  $\mathbb{R}^n$ . W geometrii klasycznej  $n$ -wymiarowy zbiór prostych w  $\mathbb{R}^n$  nazywany jest *kompleksem prostych*.

Pierwszą chronologicznie pracą w tym kierunku jest [I], w której został znaleziony nowy przykład  $n$ -wymiarowego zbioru danych, pozwalającego na rekonstrukcję, mianowicie zbiór prostych, stycznych do danej powierzchni wymiaru  $k$ , włożonej do  $\mathbb{R}^{2k+1}$ . W artykule został otrzymany jawny wzór na odwrócenie transformacji (1) dla podanego kompleksu prostych. Procedura rekonstrukcji jest dwuetapowa:

1. rekonstrukcja transformaty Radona na podstawie danych pomiarowych,
2. rekonstrukcja funkcji źródłowej na podstawie transformaty Radona metodą standardową [18].

Analogiczna procedura została uogólniona później w pracy [B] oraz w pracach [E] i [A] dla rekonstrukcji pól wektorowych i tensorowych, a także w pracy [H] dla nieprostoliniowych promieni.

Artykuł [B] prezentuje rozwiązanie zagadnienia tomografii wielowymiarowej. Głównym wynikiem jest przeniesienie opisanej wyżej dwuetapowej procedury na przypadek kompleksów prostych przy bardzo ogólnych założeniach na kompleks. Nieformalnie, założenie jest następujące:

1. każda płaszczyzna powinna zostać pokryta przez proste, należące do kompleksu,
2. w otoczeniu prostych, bliskich do pokrywających płaszczyznę, powinny się znaleźć proste, przecinające płaszczyznę transversalnie.

Opracowana procedura rekonstrukcji została zastosowana dla kilku nowych przykładów kompleksów prostych.

**Inne, niż rentgenowskie źródło promieniowania.** Zasadnicza różnica przy używaniu innych, niż rentgenowskie, źródeł promieniowania (np. tomografia ultradźwiękowa, optyczna [14]) polega na tym, że trajektorie w (1) nie są prostoliniowe. W takich przypadkach klasyczne techniki tomograficzne nie działają i opracowanie algorytmów rekonstrukcji trzeba zaczynać od stosownego modelu matematycznego, odpowiadającego równaniu (1).

Teoretyczna metoda przybliżonej rekonstrukcji funkcji z równania (1) przy bardzo ogólnych założeniach na geometrię trajektorii została opracowana w artykule [J]. Metoda ta pozwala na dokładne określenie nieciągłości funkcji i może być stosowana do detekcji krawędzi oraz kontroli spójności materiałów.

W pracy [H] przebadano przekształcenie (1) w przypadku gdy trajektorie geometrycznie pokrywają się z liniami geodezyjnymi na sferze oraz w przestrzeni hiperbolicznej. Taka sytuacja ma miejsce, na przykład, w przypadku tomografii sejsmicznej [1]. W artykule zostały otrzymane jawne analityczne wzory na odwrócenie transformacji (1), w tym także w przypadku wielowymiarowym.

W artykule [G] została opracowana metoda sprowadzenia zagadnienia rozwiązania równania (1) dla trajektorii sferycznych do przypadku trajektorii prostoliniowych. Metoda została później zastosowana do opracowania stosownego algorytmu tomografii sejsmicznej [D]. Podobne techniki zostały użyte przez wielu innych autorów (łączna ilość cytowań artykułu wg Google Scholar to 45).

W artykule [D] został opracowany i przetestowany algorytm rekonstrukcji dla tomografii sejsmicznej. W algorytmie zostały wykorzystane techniki z artykułu [G], także został uwzględniony fakt, że w praktyce w tomografii sejsmicznej nie są dostępne wszystkie możliwe teoretycznie pomiary.

**Tomografia w warunkach danych niezupełnych.** W niektórych zastosowaniach tomografii nie wszystkie kierunki są dostępne do pomiaru. Na przykład, mammografia [9], fizyka plazmy [5], sejsmika [1]. Rekonstrukcja w takich warunkach jest bardzo niestabilna [4]. Praktyczne algorytmy wymagają regularyzacji oraz uzupełnienia danych.

W artykule [F] została zaproponowana nowa metoda rekonstrukcji tomograficznej w warunkach danych niezupełnych. W szczególności, metoda określa, jaką część danych można zrekonstruować, nie tracąc stabilności re-

konstrukcji. Metoda ta jest oparta o układ funkcji z podwójną ortogonalnością, które są uogólnieniem kulistych funkcji sferycznych [23].

W pracy [C] zaprezentowano zagadnienie tomografii w warunkach danych niezupełnych. Zaprezentowano w niej zaprojektowany i zaimplementowany algorytm uzupełnienia danych w oparciu o interpolację funkcji klasy Paleya-Wienera [4]. Testy numeryczne potwierdzają skuteczność algorytmu.

**Rekonstrukcja innych niż, skalarne funkcje danych.** Techniki tomograficzne są stosowane także przy rekonstrukcji pól wektorowych i tensorowych. Na przykład, przy rekonstrukcji tomograficznej prędkości przepływu krwi [10], bądź tensora naprężenia [2]. Wszystkie wymienione powyżej zagadnienia mają miejsce w tych przypadkach.

Artykuł [E] dotyczy tomografii pól wektorowych i tensorowych w przestrzeni trójwymiarowej. Przedstawiono w nim zaproponowane jawne wzory na rekonstrukcję pól. Techniki, opracowane w tym artykule zostały wykorzystane w pracy [A] do opracowania algorytmu tomografii wektorowej.

Ostatni chronologicznie artykuł [A] dotyczy tomografii wektorowej. Mianowicie, uzyskano wzór jawny na rekonstrukcję pola wektorowego w trójwymiarowym dopplerowskim układzie tomograficznym, wykorzystującym dwa źródła promieniowania. W poprzednich pracach, np. [12], wymagane były trzy źródła. Na podstawie otrzymanego wzoru został opracowany i zaimplementowany algorytm. Przeprowadzone testy numeryczne potwierdziły poprawność opracowanej metody. W artykule zostały wykorzystane techniki, opracowane wcześniej w pracach [E] oraz [B].

Opisane techniki opracowania algorytmów tomograficznych mogą znaleźć dalszy rozwój, w szczególności, w trójwymiarowej tomografii polaryzacyjnej [16] — rekonstrukcja tensora naprężenia, tomografii Comptonowskiej poprzez sprowadzenia zagadnienia do tomografii rentgenowskiej [20], tomografii termoakustycznej [19] i innych.

## 5.2. Analiza danych

### 5.2.1. Wykaz publikacji monotematycznych z wykazaniem procentowego udziału współautorów

Lista publikacji zawiera dwa artykuły z obecnej ministerialnej listy A: [K], [L]. Artykuł [M] opublikowano w materiałach konferencyjnych, indeksowanych w WoS.

W artykule [M] wkładem habilitanta jest określenie zanurzenia przestrzeni z metryką Hamminga do sfery, oszacowanie dystorsji tego zanurzenia oraz opracowanie algorytmu znalezienia centroidu na sferze.

W artykule [L] wkładem habilitanta jest definicja zanurzenia przestrzeni z metryką Hamminga do sfery z metryką kwadransową, oszacowanie dystorsji tego zanurzenia, opracowanie algorytmu znalezienia centroidu na sferze oraz implementacja testów numerycznych dla alternatywnych algorytmów.

W artykule [K] wkładem habilitanta jest definicja zanurzenia przestrzeni z ważoną metryką Hamminga do sfery z metryką kwadransową, oszacowanie dystorsji tego zanurzenia, opracowanie algorytmów znalezienia centroidu na sferze oraz znalezienia wag metryki.

- [K]. Aleksander Denisiuk [55%], Michał Grabowski [45%]. “Embedding of the Hamming space into a sphere with weighted quadrance metric and c-means clustering of nominal-continuous data”, *Intelligent Data Analysis*, vol. **22:6** (2018). Lista A. Punktacja ministerialna: 15. 2018 Impact factor: 0,691. Ilość cytowań: 0.
- [L]. Aleksander Denisiuk [60%], Michał Grabowski [40%]. “Low Distortion Embedding of the Hamming Space into a Sphere with Quadrance Metric and k-means Clustering of Nominal-continuous Data”, *Fundamenta Informaticae*, Vol. **153**, No. 3, 221–233, (2017). Lista A. Punktacja ministerialna: 20. 2017/2018 Impact factor: 0,725. Ilość cytowań: 0.
- [M]. Aleksander Denisiuk [50%], Michał Grabowski [50%]. “A variant of the k-means clustering algorithm for continuous-nominal data”, In book: *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Recognition Systems CORES 2015*, Publisher: Springer, Editors: Robert Burduk, Konrad Jackowski, Marek Kurzyński, Michał Woźniak, Andrzej Żołnierek, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. **403**, pp. 17–26, Springer, (2016). Indeksowano w WoS. Ilość cytowań: 1 (WoS), 1 (Google Scholar).

### 5.2.2. Omówienie osiągnięcia naukowego

Cykl prac, związanych z analizą danych, jest implementacją następującej metody opracowania algorytmów, przedstawionej w pracy [8]. Niech dane będzie pewne zagadnienie w przestrzeni metrycznej  $U$ . Aby go rozwiązać, przestrzeń  $U$  zanurza się do innej, mniej skomplikowanej przestrzeni metrycznej  $U'$ , i problem zostaje rozwiązany w  $U'$ . Zazwyczaj  $U'$  jest liniową unormowaną przestrzenią. Zazwyczaj zanurzenie nie jest izometrią, więc powstały algorytm jest tylko przybliżonym rozwiązaniem pierwotnego zagadnienia. Miarą przybliżenia jest dystorsja.

W pracach [K]–[M] powyższy scenariusz został zastosowany dla kombinacji danych ciągłych i nominalnych na przykładzie algorytmów klasteryzacji. Część nominalna zostaje zanurzona do sfery.

Niech dany będzie zbiór  $M$  rekordów  $\mathbb{X} = \{ \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M \}$ . Każdy rekord składa się z dwóch części  $\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i)$ , gdzie  $X_i = (x_i^1, \dots, x_i^n) \in \mathbb{R}^n$  reprezentuje cechy ciągłe, a  $Y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,m})$  — nominalne,  $i = 1, \dots, M$ . Zakładamy, że nominalna cecha  $y_\beta$  ma  $n_\beta$  wariantów, gdzie  $n_\beta > 1$ ,  $\beta = 1, \dots, m$ , czyli  $n_\beta$  zgadza się z kardynalnością dziedziny numer  $\beta$  danych nominalnych.

Na zbiorze danych nominalnych określa się standardowa metryka Hamminga:

$$\text{dist}_h(Y_1, Y_2) = \frac{1}{m} \left| \{ \beta = 1, \dots, m \mid y_{1,\beta} \neq y_{2,\beta} \} \right| = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m \text{diff}(y_{1,\beta}, y_{2,\beta}), \quad (2)$$

gdzie

$$\text{diff}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_1 \neq t_2, \\ 0 & \text{if } t_1 = t_2. \end{cases} \quad (3)$$



W połączeniu ze standardową metryką euklidesową na  $\mathbb{R}^n$ , określa się metryka na zbiorze danych  $\mathbb{X}$ :

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \text{dist}_e^2(X_1, X_2) + \text{dist}_h^2(Y_1, Y_2) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n (x_1^\alpha - x_2^\alpha)^2 + \left( \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m \text{diff}(y_{1,\beta}, y_{2,\beta}) \right)^2. \end{aligned}$$

Dystorsja włożenia przestrzeni metrycznej jest miarą zniekształcenia odległości. Formalna definicja jest następująca:

**Definicja 5.1** (cf. [15]). Niech dane będą przestrzenie metryczne:  $(U, \text{dist})$  oraz  $(U', \text{dist}')$ . Odwzorowanie  $f : U \rightarrow U'$  ma dystorsję  $H_{\text{dist}'}$  nie większą niż  $c$ , jeżeli istnieje stała  $\mu \in (0, +\infty)$  taka, że dla każdej pary  $x, y \in U$

$$\mu \cdot \text{dist}(x, y) \leq \text{dist}'(f(x), f(y)) \leq c \cdot \mu \cdot \text{dist}(x, y).$$

W artykule [M] zostało zdefiniowane włożenie danych nominalnych do jednostkowej sfery  $\mathbb{S}^{s-1} \subset \mathbb{R}^s$ , gdzie  $s = n_1 + \dots + n_m - m$ . Komponenty danych nominalnych po włożeniu mają reprezentację  $y_\beta = (y_\beta^1, \dots, y_\beta^{n_\beta-1}) \in \mathbb{R}^{n_\beta-1}$  a wektor cech nominalnych  $Y$  ma jednostkową normę  $\|Y\|^2 = \sum_{\beta=1}^m \|y_\beta\|^2 = 1$ . W taki sposób rekordy zostają interpretowane jako punkty walca  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{s-1}$ .

Odległość między rekordami po włożeniu do walca zostaje określona jako

$$\text{dist}^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \text{dist}_e^2(X_1, X_2) + \text{dist}_s^2(Y_1, Y_2), \quad (4)$$

gdzie  $\text{dist}_s$  jest standardową odległością na sferze.

W artykule [M] oszacowano dystorsję opisanego włożenia oraz standardowego włożenia przestrzeni Hamminga do przestrzeni euklidesowej. Mianowicie, dystorsja włożenia do sfery jest nie większa, niż

$$H_s = \frac{1}{\lambda} \sqrt{2 \frac{n_{\min}}{n_{\min} - 1} \frac{n_{\max} - 1}{n_{\max}}} \sqrt{m}, \quad (5)$$

gdzie  $n_{\min} = \min_{j=1, \dots, m} n_j$ ,  $n_{\max} = \max_{j=1, \dots, m} n_j$ ,  $\lambda$  jest stałą,  $\lambda^{-1} < 3/4$ .

Natomiast ocena dystorsji włożenia do przestrzeni euklidesowej jest większa o około 25%:

$$H_e = \sqrt{\sum_{j=1}^m (n_j - 1)}.$$

Standardowy algorytm k-średnich został sformułowany dla ogólnej przestrzeni metrycznej i zaadaptowany do modelu z walcem  $\mathbb{D}$ .

W numerycznych testach zostały porównane trzy odmiany algorytmu k-średnich: bez włożenia części nominalnej do przestrzeni ciągłej, z włożeniem części nominalnej do przestrzeni euklidesowej, oraz z włożeniem części nominalnej do sfery.

Uzyskane wyniki numeryczne potwierdziły główną tezę pracy, że włożenie części dyskretnej do przestrzeni ciągłej zwiększa jakość obliczanych klastrów, a algorytm, oparty o włożenie z mniejszą dystorsją, produkuje lepsze klastry.

Testy zostały przeprowadzone na standardowych zbiorach danych z repozytorium UCI [3] oraz na sztucznych danych, zawierających po dwa klastry, wylosowane ze zbiorów, o dystrybucie zgodnej z rozpatrywanym.

Jako miarę jakości klastrow zostało wykorzystany stopień pokrycia danych klastrow przez obliczone [11].

W pracy [L] sferyczna metryka we wzorze (4) została zastąpiona przez metrykę kwadransową:

$$\text{dist}_q(Y_1, Y_2) = \frac{1 - \langle Y_1, Y_2 \rangle}{2} = \frac{1}{4} \|Y_1 - Y_2\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^m \|y_{1,\beta} - y_{2,\beta}\|^2,$$

gdzie  $\langle Y_1, Y_2 \rangle$  oznacza standardowy euklidesowy iloczyn skalarny w  $\mathbb{R}^d$ :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^d X_i Y_i.$$

Dla tak określonej metryki otrzymano oszacowanie dystorsji:

$$H_q = \frac{n_{\min} n_{\max} - 1}{n_{\max} n_{\min} - 1}, \quad (6)$$

co daje wynik lepszy o czynnik  $\sqrt{m}$  w porównaniu do (5).

Algorytm k-średnich został zaadaptowany do nowej metryki i przetestowany numerycznie. Wyniki testów pokazały, że klastry, produkowane przez nowy algorytm, mają lepszą jakość, niż klastry, produkowane przez algorytmy, oparte o włożenie do przestrzeni euklidesowej oraz o metrykę sferyczną.

Algorytm k-średnich, oparty o metrykę kwadransową, został również porównany do innych współczesnych algorytmów klasteryzacji: algorytmu k-medoidów (PAM), klasteryzacji hierarchicznej [13] oraz klasteryzacji spektralnej [17]. Wszystkie algorytmy na testowych danych produkowały klastry o zbliżonej jakości.

Podobno do poprzedniej pracy, testy zostały przeprowadzone na standardowych zbiorach danych z repozytorium UCI [3] oraz na sztucznych danych, zawierających po dwa klastry, wylosowane ze zbiorów, o dystrybucie zgodnej z rozpatrywanym modelem.

Jako miarę jakości klastrow również zostało wykorzystany stopień pokrycia danych klastrow przez obliczone [11].

W artykule [K] model danych został uzupełniony o wagi. Mianowicie, założymy, że poszczególne cechy danych mają inny wpływ na strukturę klastrow. Wprowadźmy wektor wag:

$$\mathbf{W} = (W, U) = (w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_m), \quad (7)$$

gdzie  $w_\alpha > 0$ ,  $u_\beta > 0$  for  $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\beta = 1, \dots, m$ .

Głównym założeniem jest to, że klastry są formowane w stosunku do *odległości ważonej*:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbf{W}}^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \text{dist}_{W,e}^2(X_1, X_2) + \text{dist}_{U,h}^2(Y_1, Y_2) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n w_\alpha^2 (x_1^\alpha - x_2^\alpha)^2 + \left( \sum_{\beta=1}^m u_\beta \text{diff}(y_{1,\beta}, y_{2,\beta}) \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

o niewiadomych wagach.

Odpowiednią strukturą na walcu  $\mathbb{D}$  będzie *ważona metryka kwadransowa*:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbf{W}}^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \text{dist}_{W,e}^2(X_1, X_2) + \text{dist}_{U,q}^2(Y_1, Y_2) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha}^2 (x_1^{\alpha} - x_2^{\alpha})^2 + \left( \sum_{\beta=1}^m u_{\beta} \|y_{1,\beta} - y_{2,\beta}\|^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

W artykule [K] zostało rozwiązane zagadnienie określenia wag oraz centroidów, definiujących klastry. Do rozwiązania zagadnienia była wykorzystana metoda funkcji reformulacji [11], która została zmodyfikowana na przypadek przestrzeni nieliniowej.

Opracowana metoda pozwoliła wyprowadzić jawne wzory na kolejne iteracje algorytmu określenia wag i centroidów, a także na oszacowanie błędu klasyfikacji. Na podstawie otrzymanych wzorów został zaprojektowany i zaimplementowany algorytm. Numeryczne testy pokazały, że utworzony algorytm potrafi skutecznie grupować surowe, nienormalizowane dane. Zauważmy, że wiele innych metod grupowania wymaga wstępnej normalizacji danych, co może zaburzyć strukturę klastrów [13].

Podobno do poprzednich prac, testy numeryczne zostały przeprowadzone na standardowych zbiorach danych z repozytorium UCI [3] oraz na sztucznych danych, zawierających po dwa klastry, wylosowane ze zbiorów, o dystrybucji zgodnej z rozpatrywanym modelem.

Jako miarę jakości klastrów został wykorzystany stopień pokrycia danych klastrów przez obliczone [11].

Dodatkowo w artykule [K] wykazano, iż włożenie ważonej przestrzeni Hamminga do sfery z ważoną metryką kwadransową ma dystorsję nie większą niż oszacowanie wg wzoru (6).

Jako dalszy rozwój cyklu prac można wskazać uwzględnienie w modelu ważonej odległości (8) zależności wag od centroidów. Podczas opracowania algorytmu określenia wag w artykule [K] powstały nowe liczbowe charakterystyki danych nominalnych, które wymagają interpretacji statystycznej.

Poza tym, opracowane w artykułach [M]–[K] metody mogą znaleźć zastosowanie również w innych algorytmach uczenia maszynowego, opartych o macierz odmienności.

## 6. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

### 6.1. Index cytowań

Według WoS:

Cytowania:	28
H-indeks:	2

Według Google Scholar:

	Wszystkie	Od 2013
Cytowania:	123	46
H-indeks:	5	3
i10-indeks:	3	2

Sumaryczny impact factor: 11,476.

## 6.2. Inżynieria oprogramowania

W ramach projektu „System wspomagający organizację dydaktyki” na Elbląskiej Uczelni Humanistyczno-Ekonomicznej przez habilitanta została zaprojektowana i zaimplementowana trójwarstwowa internetowa aplikacja, pozwalająca na układanie planów zajęć, planowanie obciążenia dydaktycznego wykładowcy, rozliczenie dydaktyki oraz na oszacowanie kosztów studiów.

Cechą charakterystyczną aplikacji jest wykorzystanie po stronie klienta dokumentów w formacie Open Document oraz stosownych programów użytkowych. Mianowicie, serwer generuje plik w formacie Open Dokument. Użytkownik edytuje plik za pomocą standardowego oprogramowania, i następnie zwraca plik na serwer.

Wykorzystanie po stronie klienta standardowego oprogramowania biurowego pozwoliło znacznie skrócić czas wytwarzania aplikacji, a także uprościć szkolenie użytkowników.

System został zaprezentowany na konferencji „Internet, Multimedia and Information Systems in Management” w Częstochowie w 2006 roku. A także opisany w dwóch publikacjach z listy B:

[N]. Alexander Denisjuk. “Układanie rozkładów zajęć w systemie SWOD (omówienie)”, *Acta Elbingensia*, vol. **V**, 257–267, Elbląg (2007). Na liście B od 2010, obecna punktacja ministerialna: 4.

[O]. Alexander Denisjuk. “Wykorzystanie technologii Open Source w systemie wspomagania organizacji dydaktyki w Elbląskiej Uczelni Humanistyczno-Ekonomicznej”, *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Zarządzania*, Częstochowa, **12**, 65–71 (2008) Na liście B w latach 2009–2010, Punktacja ministerialna: 2.

## 6.3. Kierowanie międzynarodowymi lub krajowymi projektami badawczymi lub udział w takich projektach

1. 2000. *Double orthogonal function systems and their applications to integral geometry*, grant Nr. 2000739 Ministerstwa Edukacji Białorusi. Kierownik projektu.
2. 1995. *Mathematical Problems of Geotomography*, grant INTAS/RFBR 95-0763, członek zespołu.
3. 1994 Grant fundacji *International Soros Foundation*, członek zespołu.

## 6.4. Recenzowanie

1. Od roku 2006 jestem recenzentem dla czasopisma *Inverse Problems*. W latach 2014–2018 wykonano 23 recenzje.
2. W różnych latach byłem recenzentem dla czasopism: *Informatica*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Journal of Geophysics and Engineering*, *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej*, *Geometric and Functional Analysis*.

## 6.5. Praca redaktorska

1. Od roku 2015 jestem redaktorem działu artykułów przeglądowych czasopisma *Informatica* ISSN 0350-5596.
2. Od roku 2014 jestem redaktorem statystycznym czasopisma *Acta Elbingensia* ISSN 1730-9980
3. W latach 2005–2008 byłem redaktorem zarządzającym i technicznym czasopisma *Scalable Computing: Practice and Experience* ISSN 1895-1767.
4. Od roku 2005 jestem redaktorem technicznym wydania materiałów konferencji naukowej *Federated conference on Computer Science and Information Systems*, (wcześniej — *International Multiconference on Computer Science*).
5. Od roku 2013 jestem redaktorem technicznym serii *Annals of Computer Science and Information Systems* ISSN 2300-5963, wydawanej przez PTI.

## 6.6. Wygłaszanie referatów na międzynarodowych i krajowych konferencjach

W ostatnich pięciu latach zostały wygłoszone referaty na następujących konferencjach:

1. 2018: Aleksander Denisiuk, *Inversion of the cone-beam vector x-ray transform with two sources*. The Ninth International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, Malta, *Invited speaker*.
2. 2017: Aleksander Denisiuk, *On inversion of the cone-beam vector x-ray transform with two sources*. Control Theory, Integral Geometry, Inverse Problems, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Rosja, *Invited speaker*.
3. 2016: Aleksander Denisiuk, *Integral Geometry of Complexes of Lines in  $\mathbb{R}^n$* . The Eighth International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, Izmir University, École Polytechnique and The Eurasian Association on Inverse Problems (EAIP). Ölüdeniz, Fethiye, Turcja, *Invited speaker*.
4. 2015: Aleksander Denisiuk & Michał Grabowski, *A variant of the k-means clustering algorithm for continuous-nominal data*. The 9 International Conference on Computer Recognition Systems (CORES), Department of Systems and Computer Networks, Wrocław University of Technology. Wrocław.
5. 2014: Aleksander Denisiuk, *Geometry of complexes of lines in  $\mathbb{R}^n$  and inversion of the X-ray transform*. International Workshop “Inverse Problems and Integral Geometry”, Immanuel Kant Baltic Federal University. Kaliningrad, Rosja, *Invited speaker*.

## 6.7. Nagrody za działalność naukową

1. Wyróżnienie „Outstanding Reviewer Award 2017”. IOP Publishing.
2. Nagroda Indywidualna Rektora Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie II stopnia za 2016 rok.

## 6.8. Staże w zagranicznych i krajowych ośrodkach naukowych lub akademickich

1. 1991. Moskiewski Uniwersytet Państwowy. Wydział matematyki obliczeniowej i cybernetyki. Semestralny staż podoktorski.
2. 2003. Uniwersytet w Sztokholmie oraz Uniwersytet w Lund, Szwecja. Wizyta naukowa.
3. 2003. University of Washington, Seattle, USA. Wizyta naukowa.

## 7. Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne i inne osiągnięcia

### 7.1. Praca dydaktyczna

Od roku 2009 wykładam na Polsko-Japońskiej Akademii Technik Komputerowych, Wydział Informatyki w Gdańsku. Przedmioty algebra liniowa z geometrią analityczną, analiza matematyczna, grafika komputerowa, technologie internetowe, programowanie w OpenGL, przetwarzanie i kompresja obrazów, animacja komputerowa. Do wszystkich przedmiotów zostały opracowane pomoce dydaktyczne: <http://users.pja.edu.pl/~denisjuk>. Jestem promotorem prac inżynierskich.

Od roku 2007 wykładam na Uniwersytecie Warmińsko-Mazurskim w Olsztynie. Przedmioty: Programowanie I, Wprowadzenie do grafiki maszynowej, Narzędzia informatyczne, Modelowanie i wizualizowanie 3W grafiki, Zaawansowane systemy programowania grafiki, Elementy grafiki komputerowej. Do wszystkich przedmiotów zostały opracowane pomoce dydaktyczne: <http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>. Jestem promotorem prac inżynierskich i magisterskich. *Liczba wypromowanych magistrów: 18.*

W latach 2005–2015 wykładałem na Elbląskiej uczelni Humanistyczno-Ekonomicznej: Podstawy informatyki w administracji, Technologie Informatyczne, Statystyka opisowa, Matematyka. Materiały dydaktyczne: <http://denisjuk.euh-e.edu.pl>.

W latach 2001–2008 wykładałem na Prywatnej Wyższej Szkole Zawodowej w Giżycku, Katedra informatyki stosowanej: Metody numeryczne, Programowanie, Sztuczna inteligencja, Matematyka dyskretna, Analiza matematyczna, Algebra liniowa z geometrią analityczną, Pakiety programów użytkowych, Języki programowania (laboratorium), Grafika komputerowa (ćwiczenia), Techniki programowania, Programowanie w Internecie, Przetwarzanie dokumentów cyfrowych.

1995–2001 Brzeski Uniwersytet Państwowy (Białoruś). Przedmioty: Metody numeryczne, Programowanie, Programowanie logiczne, Sztuczna inteligencja, Matematyka dyskretna, Metody optymalizacji, Pakiety programów użytkowych.

1991–1995 Krasnojarski Państwowy Uniwersytet Pedagogiczny (Rosja). Przedmioty: Metody numeryczne, Programowanie, Programowanie logiczne, Sztuczna inteligencja.

1990–91 Podczas studiów doktoranckich, Moskiewski Uniwersytet Państwowy, Wydział Matematyki i Mechaniki: Teoria funkcji uogólnionych, Stosowane aspekty analizy matematycznej.

## 7.2. Nagrody za działalność dydaktyczną

2015: Dyplom uznania. W uznaniu dotychczasowej działalności dydaktycznej w Polsko-Japońskiej Akademii Technik Komputerowych w Gdańsku, pozytywnego podejścia do studentów oraz rzadko spotykanej umiejętności zainteresowania słuchaczy poprzez łączenie pracy z pasją.

## 7.3. Zawody w programowaniu zespołowym

Od roku 2010 biorę udział w organizacji corocznych Warmińsko-Mazurskich zawodów w programowaniu zespołowym.

W latach 2011–2014 organizowałem studenckie Zawody programistyczne o Prezenty Świętego Mikołaja (UWM).

2002–2005: opiekun klubu programistów w Prywatnej wyższej szkole zawodowej w Giżycku.

W latach 1998–2000 byłem członkiem jury państwowej szkolnej olimpiady informatycznej na Białorusi.

W latach 1998–2001 byłem trenerem drużyny Uniwersytetu Brzeskiego w programowaniu zespołowym ACM.

Zorganizowałem dwa turnieje międzynarodowe w programowaniu:

1. The Joint Open Contest of Gizycko Private Higher Education Intsitute and Brest State Unversity (2002) [https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com\\_onlinejudge&Itemid=13&page=show\\_contest&contest=43](https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=13&page=show_contest&contest=43)
2. Sergeant Pepper’s Lonely Programmers Club, Junior Contest (2001) [https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com\\_onlinejudge&Itemid=13&page=show\\_contest&contest=19](https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=13&page=show_contest&contest=19)

Trzy moje zadania zostały włączone w zbiór książki [22].

## 7.4. Członkostwo w międzynarodowych i krajowych organizacjach oraz towarzystwach naukowych

Jestem członkiem trzech towarzystw naukowych:

1. Polskie Towarzystwo Informatyczne
2. Polskie Towarzystwo Matematyczne
3. Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne

## 7.5. Udział w organizacji międzynarodowych konferencji

1. 2010–2018 *Federated conference on Computer Science and Information Systems*, redaktor TeXniczny.
2. 2006–2010 *International Multiconference on Computer Science and Information*, redaktor TeXniczny.
3. 2005 *Sesja Naukowa Jesiennych Spotkań PTI*, redaktor TeXniczny.

## 7.6. Popularyzacja nauki

Działania, popularyzujące naukę z ostatnich pięciu lat:

1. Warsztaty „Informatyka w służbie efektów specjalnych. Część druga” podczas Olsztyńskich Dniach Nauki i Sztuki w latach 2018 i 2017.
2. Referat „Tomografia Wektorowa” wygłoszony na Olsztyńskim kole PTI 26 kwietnia 2018.
3. Zajęcia z dziećmi w ramach projektu „W zaciszu matematyki”. Temat: „Bryły w modelowaniu 3D” 23 listopada 2016 (UWM, Olsztyn).
4. Zajęcia z gimnazjalistami z obozu polonijnego w latach 2013–2016. Tematy, związane z modelowaniem 3D. UWM, Olsztyn.
5. Wykład „Układy równań liniowych, macierze, Google” w ramach Spotkań z Matematyką. UWM, Olsztyn, 2016.
6. Wykład „Cała prawda o powierzchniach” w ramach Spotkań z Matematyką. UWM, Olsztyn 2014.
7. Wykład o grafice komputerowej i OpenGL w ramach dni otwartych na wydziale Informatyki w Gdańsku na Polsko-Japońskiej Akademii Technik Komputerowych.

## 7.7. Projekty informatyczne

1. 2013: Klasa dokumentów `uwmmthesis` do pisania prac dyplomowych na UWM w Olsztynie w  $\text{\LaTeX}$  — projekt jednoosobowy.
2. 2009: System komputerowy wspomagający rozliczenie komercyjnych usług medycznych (Przychodnia Twoje Zdrowie, Elbląg) — projekt jednoosobowy.
3. 2007: Czasopismo „Scalable Computing: Practice and Experience”, <http://www.scpe.org> (aktualnie aplikacja została zastąpiona) — projekt jednoosobowy.
4. 2005–2006 System wspomagający organizację dydaktyki w EUH-E, <http://plany.euh-e.edu.pl> — projekt jednoosobowy.
5. 2004: Information Ethics Library — członek zespołu, odpowiedzialny za moduły Rating, Units.
6. 1999: System rejestracji zużycia środków narkotycznych w Szpitalu kolejowym w Brześciu, Białoruś — projekt jednoosobowy.

## Bibliografia

- [1] Tarantola A. “Inversion of travel times and seismic waveforms”. W: *Seismic Tomography*. Red. G. Nolet. Reidel, 1987, s. 135–157.
- [2] Hillar Aben. *Integrated photoelasticity*. New York; London: McGraw Hill, 1979. ISBN: 0070000433.
- [3] Arthur Asuncion i David J. Newman. *UCI Machine Learning Repository*. 2007. URL: <http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLRepository.html>.
- [4] Alexander Denisjuk i Victor Palamodov. “Inversion de la transformation de Radon d’après des données incomplètes”. W: *C. R. Acad. Sci. Paris* 307, Série I (1988), s. 181–183.



- [5] Nikolay Efremov, Nikolay Poluektov i Victor Kharchenko. “Tomography of ion and atom velocities in plasmas”. W: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 53.6 (1995), s. 723–728. ISSN: 0022-4073. DOI: 10.1016/0022-4073(95)00021-C. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002240739500021C>.
- [6] Ambartsoumian G. i Moon S. “A series formula for inversion of the V-line Radon transform in a disc”. W: *Computers & Mathematics with Applications* 66 (9 2013), s. 1567–1572.
- [7] Gabor T. Herman. *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*. 2nd. Springer Publishing Company, Incorporated, 2009. ISBN: 185233617X, 9781852336172.
- [8] Piotr Indyk i Jiří Matoušek. “Low-Distortion Embeddings of Finite Metric Spaces”. W: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 2004, s. 177–196.
- [9] Kwang Eun Jang i in. “Comparative studies on exposure conditions and reconstruction algorithms in limited angle tomography”. W: t. 8668. 2013, s. 86680D. DOI: 10.1117/12.2007894. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2007894>.
- [10] Peter Juhlin. *Principles of Doppler Tomography*. Spraw. tech. SE-22100. Centre for Mathematical Sciences, Lund Institute of Technology, 1992.
- [11] Nicolaos B. Karayiannis i Mary M. Randolph-Gips. “Non-Euclidean c-means clustering algorithms”. W: *Intell. Data Anal.* 7.5 (2003), s. 405–425. URL: <http://content.iospress.com/articles/intelligent-data-analysis/ida00138>.
- [12] Alexander Katsevich, Dimitri Rothermel i Thomas Schuster. “An improved exact inversion formula for solenoidal fields in cone beam vector tomography”. W: *Inverse Problems* 33.6 (2017), s. 064001. DOI: 10.1088/1361-6420/aa58d5. URL: <http://stacks.iop.org/0266-5611/33/i=6/a=064001>.
- [13] Leonard Kaufman i Peter J. Rousseeuw. *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*. T. 344. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley, 2008. ISBN: 9780470317488. DOI: 10.1002/9780470316801.
- [14] Peter Kuchment. *The Radon Transform and Medical Imaging*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial i Applied Mathematics, 2014. ISBN: 1611973287, 9781611973280.
- [15] Nathan Linial. “Finite metric spaces—combinatorics, geometry and algorithms”. W: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002*. Red. Li Ta-Tsien. T. III. 2002, s. 573–586.
- [16] William Lionheart i Vladimir Sharafutdinov. “Reconstruction algorithm for the linearized polarization tomography problem with incomplete data”. English. W: *Imaging microstructures*. T. 494. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, s. 137–159. DOI: 10.1090/conm/494/09648.
- [17] Ulrike von Luxburg. “A tutorial on spectral clustering”. W: *Statistics and Computing* 17.4 (2007), s. 395–416. DOI: 10.1007/s11222-007-9033-z. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11222-007-9033-z>.

- [18] Frank Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial i Applied Mathematics, 2001. ISBN: 0-89871-493-1.
- [19] Kuchment P. i Kunyansky L. “Mathematics of thermoacoustic tomography”. W: *Euro. Jnl of Applied Mathematics* 19 (2008), s. 191–224.
- [20] Victor Palamodov. “An analytic reconstruction for the Compton scattering tomography in a plane”. W: *Inverse Problems* 27 (12 2011), s. 125004.
- [21] Johann Radon. “Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten”. W: *Akad. Wiss.* 69 (1917), s. 262–277.
- [22] Steven S. Skiena i Miguel A. Revilla. *Programming Challenges*. Texts in Computer Science. New Yourk: Springer-Verlag, 2003.
- [23] David Slepian i Henry Otto Pollak. “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—I”. W: 40.1 (sty. 1961), s. 43–63. ISSN: 0005-8580. URL: <http://bstj.bell-labs.com/BSTJ/images/Vol40/bstj40-1-43.pdf>.